

# 液压缸运动的非线性动态特征\*

王林鸿<sup>1,2</sup> 吴波<sup>1</sup> 杜润生<sup>1</sup> 杨叔子<sup>1</sup>

(1. 华中科技大学机械科学与工程学院 武汉 430074;

2. 南阳理工学院机电工程系 南阳 473004)

**摘要:** 根据非线性动力学的观点, 通过理论分析和试验验证, 研究非线性弹簧力和非线性摩擦力对液压缸动态特性的作用。得出三种不同节流调速回路工况下液体弹簧刚度随位移变化规律, 发现不同工况各自呈现出软弹簧特性或硬弹簧特性。提出非线性弹簧力作用可以用有阻尼的 Duffing 方程描述, 非线性摩擦力作用可以用 Van Der Pol 方程描述, 非线性弹簧力和非线性摩擦力耦合作用可以用 Lienard 方程描述。指出液压缸低速爬行原因是在特定工况下软弹簧特性引起的“跳跃现象”和非线性摩擦力引起的自激振动共同作用的结果。方程的解在不同工作条件下具有不同的形态, 说明液压缸非线性动态特性复杂多变。

**关键词:** 液压缸 非线性动态特征 Duffing 方程 Van Der Pol 方程 Lienard 方程 跳跃现象 自激振动

**中图分类号:** TH113

## 0 前言

由于液压传动介质的流动性、可压缩性、粘性、易受污染等特性以及易受温度、压力等环境的影响等原因, 使得液压缸往复运动动态性能表现得比机械传动复杂得多, 极易出现振动、噪声、冲击和爬行等不正常工作状态, 而且故障原因不易确定, 影响设备的稳定运行。

对液压系统动态特性的研究很多。李永堂等<sup>[1]</sup>在其专著中详细论述了液压系统各部分的建模与仿真。邓乐<sup>[2]</sup>对液压仿形刀架进行了动态特性分析。罗艳蕾<sup>[3]</sup>利用 Matlab 对液压节流调速系统进行了动态特性仿真。石红雁等<sup>[4]</sup>利用 Simulink 对液压系统进行了动态仿真。卢贵主等<sup>[5]</sup>利用功率键合图和 Simulink 对液压系统进行了动态仿真。王艾伦等<sup>[6]</sup>利用键合图、大系统分析法和耦合理论对复杂非线性液压系统进行了建模和仿真。以上研究针对的对象和利用的方法不同, 但研究思路和研究路线基本一致, 即根据液压系统的流量特性和负载特性建立系统动态特性方程式, 忽略次要因素, 对非线性因素进行线性化处理, 对各方程进行拉氏变换, 画出系统方框图, 用经典控制理论方法得到整个系统的传递函数, 然后进行数值计算仿真, 研究结论表现为复杂的数学表达式和仿真曲线。因为传递函数是由典型环节构成的, 所以当对系统输入阶跃信号或斜坡信号时, 其动态响应也很典型和规范。由于忽

略了弹簧和摩擦等非线性因素, 结论与实际情况有很大差别, 很难解释实际动态测试中, 时域波形复杂, 频域尖峰繁多以及“爬行”等异常现象。

对液压缸低速爬行现象研究也很多, 找出的原因和解决措施十分有效。贺仁良等<sup>[7]</sup>提出了磨床低速爬行现象的鱼刺图。但多数研究穷举了引起低速爬行的宏观原因, 没有涉及动态本质特征。关于液压缸爬行微观机理研究也多有建树。黄民双等<sup>[8]</sup>进行了机床液压系统爬行振动分析及试验研究, 提出爬行运动实质是一种不连续非线性摩擦振动, 爬行运动的产生与滑动面之间摩擦力特性及系统刚度紧密相关, 建立了数学模型并进行了理论分析和试验研究。任卫红<sup>[9]</sup>提出了爬行的摩擦自激振动本质特性并建立了数学模型。高钦和<sup>[10]</sup>提出爬行现象的产生与摩擦力特性、系统刚度、移动速度有关, 建立了进油路节流调速回路的数学模型并进行了仿真。尚存在没有考虑弹簧刚度的非线性、套用干摩擦自振模型和动态特征不够鲜明等不足。

本文以液压缸为研究对象, 着重研究弹簧刚度和摩擦力等非线性因素对动态特性的影响。通过理论分析和试验验证, 来揭示液压缸运动的非线性动力学影响因素及规律性, 提出典型的液压缸运动非线性动态特征, 使分析和求解液压缸动态性能变得简单明了。

## 1 非线性动态特征理论分析

### 1.1 液压缸的动力学模型

液压缸的工作简图如图 1 所示, 其动力学方程为

\* 国家重点基础研究发展计划资助项目(973 计划, 2005CB724101)。20061228 收到初稿, 20070827 收到修改稿

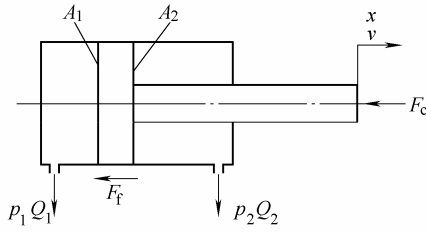


图 1 液压缸工作简图

$$m\ddot{x} + F_c + F_s + F_f = p_1 A_1 - p_2 A_2 - F_L \quad (1)$$

- 式中  $m$ ——活塞质量  
 $x$ ——活塞位移  
 $F_c$ ——粘性力  
 $F_s$ ——弹性力  
 $F_f$ ——摩擦力  
 $F_L$ ——负载  
 $p_1$ ——进油腔压力  
 $p_2$ ——回油腔压力  
 $A_1$ ——无杆腔活塞面积  
 $A_2$ ——有杆腔活塞面积

1.2 非线性弹簧力

液压缸系统弹簧刚度由活塞杆刚度和液压油刚度串联合成。液压油的体积模量  $K_v=1.4\sim 2$  GPa，而钢的体积模量在 196~206 GPa 之间，是液压油的 100~150 倍，故可以把活塞杆作为刚体处理，系统的弹簧力主要来自于受控液压油所构成的液体弹簧。

设置液压缸有三种不同工况，由同一个单向调速阀调节速度保持不变，使三种工况的平均速度基本相同。这三种工况如下表所示。

表 液压缸三种工况

工况	工况描述	弹簧特性	外加阻尼	运行质量
1	进油路节流回油无背压	全程软	无	爬行
2	进油路节流回油有背压	半程软 半程硬	有	无爬行
3	回油路节流	全程硬	有	无爬行

液压缸活塞运动改变了液体弹簧的长度，引起弹簧刚度的改变，其规律为

$$k(x) = K_v A_1 [a / (L_1 + x) + b(A_2 / A_1) / (L_2 + L - x)] \quad (2)$$

式中  $L$ ——液压缸有效行程

$L_1$ ——进油腔当量初位移

$L_2$ ——回油腔当量终位移

$a, b$ ——工况选择参数，工况 1 时  $a=1, b=0$ ,

工况 2 时  $a=1, b=1$ , 工况 3 时  $a=0, b=1$

由式(2)得出的三种工况弹簧刚度随液压缸位移的变化规律如图 2 所示。

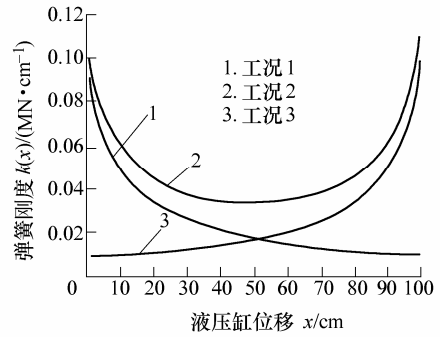


图 2 三种工况弹簧刚度随液压缸位移的变化规律

令  $y = x - v_0 t$ ，将式(2)在工作点 ( $x = v_0 t, k = k(v_0 t)$ ) 处展成泰勒级数

$$k(y) = k(v_0 t) + \frac{dk(v_0 t)}{dy} y + \frac{1}{2!} \frac{d^2 k(v_0 t)}{dy^2} y^2 + \dots$$

$$k(v_0 t) = K_v A_1 [1 / (L_1 + v_0 t) + (A_2 / A_1) / (L_2 + L - v_0 t)] = k$$

$$\frac{dk(v_0 t)}{dy} = K_v A_1 [-1 / (L_1 + v_0 t)^2 + (A_2 / A_1) / (L_2 + L - v_0 t)^2] = k'$$

$$\frac{1}{2!} \frac{d^2 k(v_0 t)}{dy^2} = \frac{1}{2!} K_v A_1 [1 / (L_1 + v_0 t)^3 - (A_2 / A_1) / (L_2 + L - v_0 t)^3] = k''$$

$$k(y) = k + k'y + k''y^2 + \dots$$

$$F_s = k(y) \times y = ky + k'y^2 + k''y^3 + \dots \quad (3)$$

把式(3)与基准线性弹簧力在  $y$  的取值范围内比较，呈现出图 3 所示的特性，曲线 2 为基准线性弹簧特性，工况 1 在整个行程中呈软弹簧特性(曲线 1)；工况 2 的前半行程呈软弹簧特性(曲线 1)，后半行程呈硬弹簧特性(曲线 3)；工况 3 整个行程呈硬弹簧特性(曲线 3)。

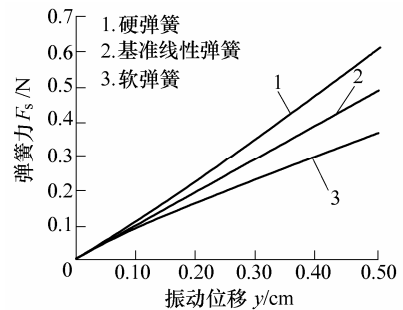


图 3 弹簧的软硬特性

1.3 非线性摩擦力

图 4 所示的著名的 Streibeck 曲线粗略地表示了润滑状态的转化关系。图 5 为摩擦力与速度的关系曲线。

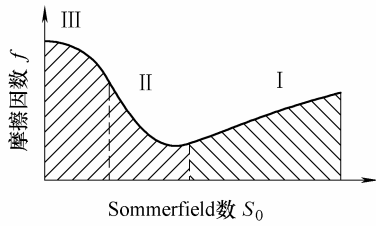


图4 Streibek 曲线

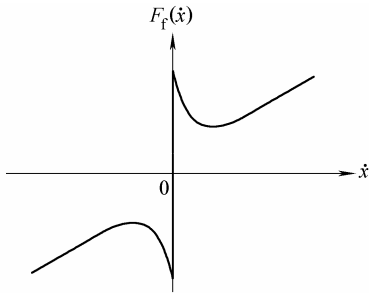


图5 摩擦力与速度的关系曲线

图4中横坐标 Sommerfeld 数  $S_0 = \text{粘度} \times \text{速度} / \text{载荷}$ ，纵坐标是摩擦因数。区域 I 属流体动压润滑状态，区域 II 为混合润滑状态，区域 III 为边界润滑状态<sup>[11]</sup>。

令  $\dot{y} = \dot{x} - v_0$ ，将摩擦力  $F_f(\dot{x})$  在工作点  $(\dot{x} = v_0, F_f(\dot{x}) = F_f(v_0))$  展成泰勒级数，并且令

$$\frac{dF_f(v_0)}{d\dot{y}} = c', \quad \frac{1}{2!} \frac{d^2 F_f(v_0)}{d\dot{y}^2} = c'', \quad \frac{1}{3!} \frac{d^3 F_f(v_0)}{d\dot{y}^3} = c''' \quad (4)$$

得

$$F_f(\dot{x}) \approx F_f(v_0) + c'\dot{y} + c''\dot{y}^2 + c'''\dot{y}^3 + \dots \quad (4)$$

可见，摩擦力是非线性的，式(4)的系数随工作点在 Streibek 曲线上所处区段不同而异<sup>[12]</sup>。

### 1.4 非线性动态特性

据上述分析，系统动力学方程式(1)可详细表达为

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + (c'\dot{y} + c''\dot{y}^2 + c'''\dot{y}^3) + (ky + k'y^2 + k''y^3) = p_1A_1 - p_2A_2 - F_L - F_f(v_0) \quad (5)$$

#### 1.4.1 方程右边的输入项

液压缸液压油的压力有微观波动，基本服从简谐振动规律，可近似表示为  $F \cos \omega t$ ，是系统的激振源<sup>[13]</sup>。

#### 1.4.2 非线性弹簧力的作用

先假设系统阻尼为线性阻尼，弹簧弹性势能  $U$  具有对称性

$$U = \frac{1}{2}k_1y^2 + \frac{1}{4}k_3y^4$$

弹簧力可以表达为

$$F_s = ky + k'y^2 + k''y^3 = \frac{dU}{dy} = k_1y + k_3y^3 \quad (6)$$

式中  $k_3 < 0$  时为软弹簧， $k_3 > 0$  时为硬弹簧。

将式(6)代入式(5)，整理后为有阻尼的 Duffing 方程

$$m\ddot{y} + c_L\dot{y} + k_1y + k_3y^3 = F \cos \omega t \quad (7)$$

式中  $c_L = c + c'$  为线性阻尼系数。

式(7)的幅频特性如图6所示， $k_3 < 0$  时为尾部左偏曲线， $k_3 > 0$  时为尾部右偏曲线，均将在不稳定区发生“跳跃现象”。阻尼的大小决定了振幅的大小。

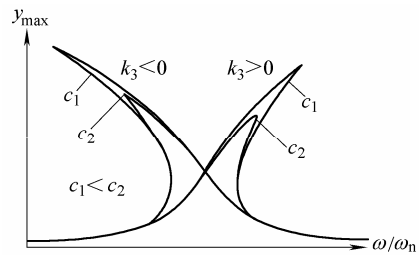


图6 有阻尼 Duffing 方程幅频特性

Duffing 方程在相平面上有三个定点(图7)：鞍点  $S(0, 0)$ 、稳定焦点  $F_1(\sqrt{-k_1/k_3}, 0)$  和稳定焦点  $F_2(-\sqrt{-k_1/k_3}, 0)$ 。不同初始条件决定系统在两个流域之一内以螺旋线形式趋于两个稳定焦点之一。当外加周期力( $F \neq 0$ )时，系统便有可能穿过流域分界线，在不同流域之间来回跳动，从而形成复杂的震荡状态，既可能作周期运动或准周期运动，也可能作混沌运动<sup>[14]</sup>。

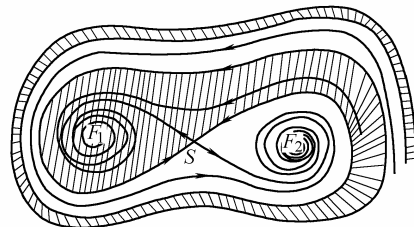


图7 Duffing 方程的定点和流域

#### 1.4.3 非线性摩擦力的作用

忽略弹簧的非线性因素，集中研究非线性摩擦力对动态特性的影响。

(1) 当工作点在图4区域 I 时，为流体动压润滑状态，摩擦力特性为线性的，此时

$$\frac{dF_f(v_0)}{d\dot{y}} = c' > 0, \quad \frac{d^2 F_f(v_0)}{d\dot{y}^2} = 0, \quad \frac{d^3 F_f(v_0)}{d\dot{y}^3} = c''' = 0$$

$$F_f(v_0 + \dot{y}) - F_f(v_0) = c'\dot{y}$$

其自由振动方程为

$$m\ddot{y} + (c + c')\dot{y} + ky = 0 \quad (8)$$

式(8)仍然为线性方程，摩擦力的作用增加了系统的阻尼。

(2) 当工作点在图4区域 II 或区域 III 时，摩擦

力特性是非线性的。在工作点附近

$$\frac{dF_f(v_0)}{dy} = c' < 0 \quad \frac{1}{2!} \frac{d^2 F_f(v_0)}{dy^2} = c'' \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{3!} \frac{d^3 F_f(v_0)}{dy^3} = c''' \geq 0$$

其自由振动方程为

$$m\ddot{y} + (c + c')\dot{y} + c'''y^3 + ky = 0 \quad (9)$$

可以整理为以下形式

$$\ddot{y} - \varepsilon\dot{y}(1 - \delta\dot{y}^2) + \omega_n^2 y = 0 \quad (10)$$

式中  $\varepsilon = -\frac{c'+c}{m}$      $\delta = -\frac{c'''}{c'+c}$      $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

当  $|c'| > c$  时,  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$ , 式(10)是 Rayleigh 方程。将方程各项对  $t$  求导, 将  $\dot{y}$  作为新变量仍记为  $y$ , 参数  $3\delta$  以  $\delta$  代替, 化为

$$\ddot{y} - \varepsilon\dot{y}(1 - \delta y^2) + \omega_n^2 y = 0 \quad (11)$$

式(11)是与 Rayleigh 方程等价的 Van Der Pol 方程。求解 Van Der Pol 方程的周期解、分叉与混沌, 已有成熟的理论与方法。Rayleigh 方程和 Van Der Pol 方程都存在极限环, 如图 8 所示<sup>[15]</sup>。

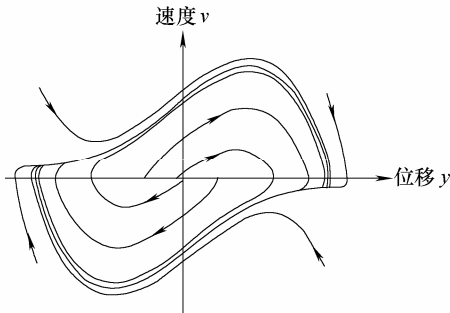


图 8 Van Der Pol 极限环

方程式(11)的特征根为

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 - \omega_n^2} \quad (12)$$

分析式(12), 当  $\varepsilon > 0$  时, 工作点是不稳定的平衡点, 从工作点近旁出发的轨线是发散的, 但局限于极限环的范围(如图 8); 当  $\varepsilon < 0$  时, 工作点是稳定的平衡点。

可见, 工作在图 4 区域 II 或区域 III 的系统, 当  $|c'| < c$  时, 是稳定的; 当  $|c'| > c$  时, 摩擦力作用的效果是产生具有极限环的自激振动。

(3) 当工作点在  $y$  轴上时, 工作速度  $v_0 \rightarrow 0$  时,  $\dot{x} = v_0 + \dot{y}$  在零点邻域内振动, 摩擦力在  $\dot{x} = 0$  处跃迁, 摩擦因数具有随机性和跳跃性(图 5), 系统为具有随机系数的 Van Der Pol 方程。

#### 1.4.4 非线性弹簧力和非线性摩擦力的耦合

由上述分析可知, 弹簧力非线性的作用可以用有阻尼的 Duffing 方程描述; 摩擦力非线性的作用可以用 Rayleigh 方程或 Van Der Pol 方程描述。

进一步研究发现, 若不考虑外加周期力 ( $F = 0$ ), 同时考虑弹簧力和摩擦力的非线性作用, 耦合系统具有 Lienard 方程的形式

$$m\ddot{y} + f(y, \dot{y})\dot{y} + g(y) = 0 \quad (13)$$

式中  $f(y, \dot{y}) = \varepsilon(1 - \delta\dot{y}^2)$  或  $f(y, \dot{y}) = \varepsilon(1 - \delta y^2)$  表示阻尼力,  $g(y) = k_1 y + k_3 y^3$  表示恢复力。

相关文献[16-19]研究了 Lienard 方程在  $g(y)$  和  $f(y, \dot{y})$  满足不同条件时, 有存在周期解、不存在周期解、存在极限环和不存在极限环等不同解的形态。说明正是由于非线性因素的作用, 造成了液压缸动态特性的复杂和多变。

综上所述, 考虑了非线性因素的液压缸运动的动力学模型可以简化为图 9 所示。

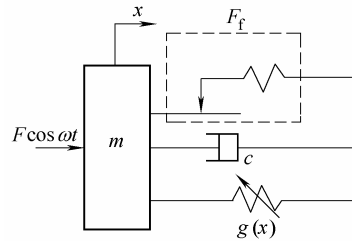


图 9 液压缸运动的非线性动力学模型

图 9 中,  $m$  为活塞质量;  $c$  为粘性阻尼系数;  $g(y)$  为非线性恢复力;  $F_f(\dot{x})$  为非线性摩擦力;  $F \cos \omega t$  为系统所受的激振力。

## 2 液压缸动态试验验证

在液压试验台上, 按上表所示设置的三种不同工况, 对液压缸进行动态测试, 采集数据用 Matlab7 进行辅助处理, 图 10~17 分别展示了液压缸不同工况, 在伸出速度几乎相同时全程时域波形、全程频闪采样图、分段时域波形和分段快速傅里叶变换的功率谱图<sup>[20-21]</sup>。

### 2.1 全程动态特征

三种不同工况全程振动位移时域波形如图 10 所示。比较三种工况发现, 工况 1 的峰值最大, 随活塞行程的增加而逐渐降低; 工况 2 初始段较大, 随后稳定在较低的水平; 工况 3 自始至终稳定在较低的水平。可见, 在液压缸的整个行程中, 动态性能随活塞位移而变化, 其变化规律随工况不同而有明显不同, 这与弹簧刚度随位移变化有关。

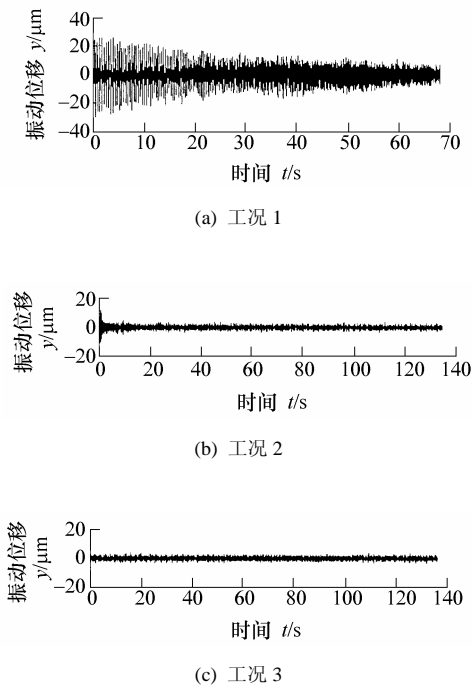


图 10 全程采样时域波形

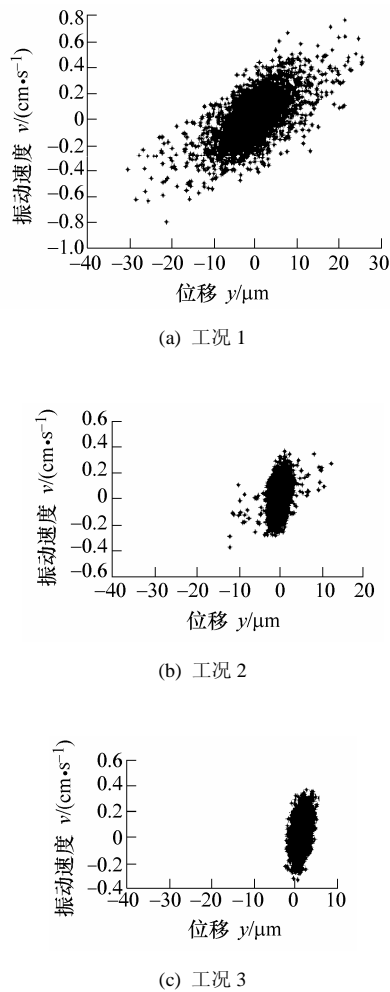


图 11 全程频闪采样图

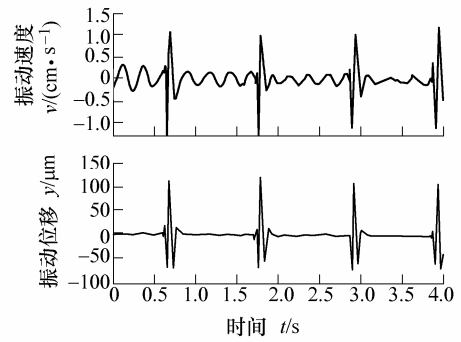
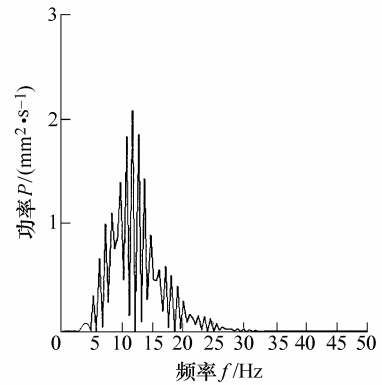
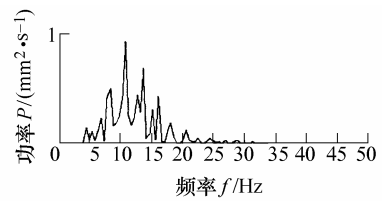


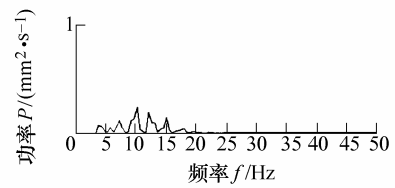
图 12 工况 1 分段时域波形



(a) 始段



(b) 中段



(c) 终段

图 13 工况 1 分段快速傅里叶变换功率谱

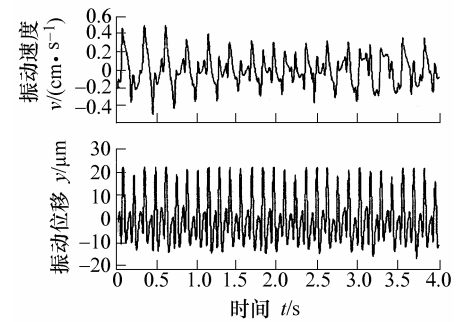


图 14 工况 2 分段时域波形

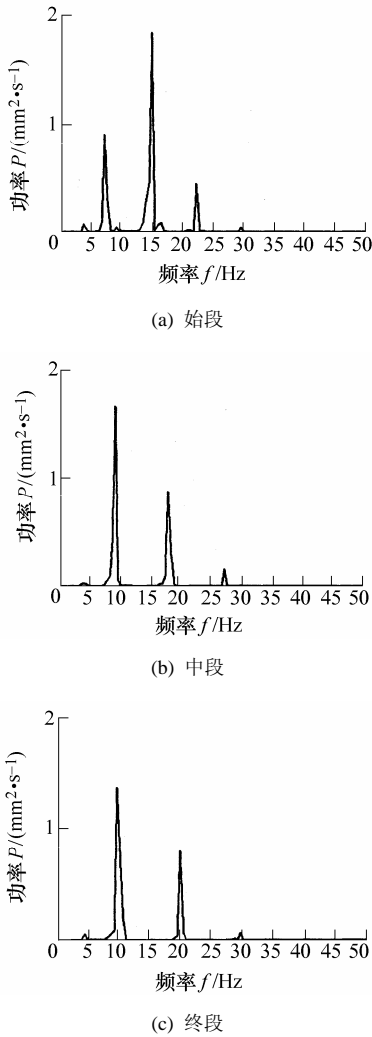


图 15 工况 2 分段快速傅里叶变换功率谱

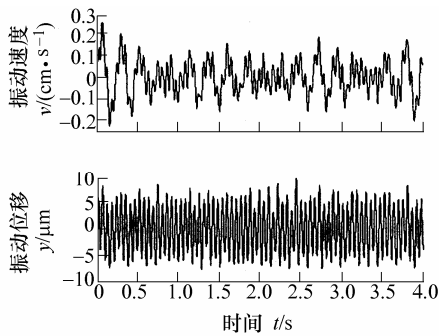


图 16 工况 3 分段时域波形

图 11 为三种工况的全程频闪采样图,其覆盖区域与图 8 所示的 Van Der Pol 极限环极为相似,每种工况都存在一个极限环,说明摩擦自激振动存在的普遍性。工况 1 的面积最大,工况 2 的次之、工况 3 的最小,说明系统外加阻尼的大小决定极限环面积的大小。工况 1、2 的轮廓边界由零散点构成,而工况 3 的轮廓边界清晰,说明工况 1、2 存在跳跃现象,而工况 3 不存在。这是因为工况 1 全程和工况 2 的前半程呈软弹簧特性,发生了跳跃现象,而工况 3 全程呈硬弹簧特性,没有发生跳跃现象。

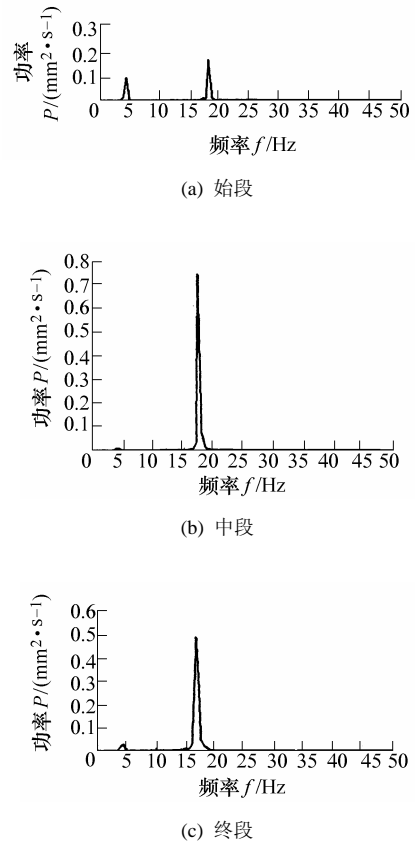


图 17 工况 3 分段快速傅里叶变换功率谱

### 2.2 各工况动态特征

工况 1 经历了弹簧刚度值  $k$  和固有频率  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  由大到小的过程,假定压力波动的激振频率  $\omega$  基本不变,系统相当于经历了一个  $\omega/\omega_n$  由小到大的扫频过程。工况 1 全程呈软弹簧特性,其频响特征对应图 6 左偏曲线所在的低频段“跳跃现象”。图 10a 所示的峰值随行程的变化规律和图 6 的趋势一致,印证了这一点。

工况 1 系统阻尼系数  $c$  小,“跳跃现象”的振幅就大,而且极易出现  $|c'| > c$  的情况,使系统发生自激振动。

图 12 显示出了工况 1 分段采样的时域波形,波形不规则。图 13 显示了工况 1 分段采样始、中、终三段的快速傅里叶变换功率谱图。从图 13 中可以看出,始段功率谱幅值最大,频带最宽,因为该段软弹簧特性最强,“跳跃现象”区覆盖面最大;能量分布在整個带宽上,尖峰数量多,间隔小,难以分辨,说明了“跳跃现象”发生在带宽内不同的频率点上;在带宽内表现为有色噪声,说明了摩擦自激振动的存在。中段以后,带宽变窄,频率分辨力增加,“跳跃现象”发生的范围变窄、程度减轻,因为软弹簧特性变弱,使“跳跃现象”区域变窄,弹簧刚度变小使  $\omega/\omega_n$  变大,工作点向右移(图 6),振幅随之减小。

图 14 显示了工况 2 分段采样始段的时域波形, 与工况 1 不同。图 15 为工况 2 的快速傅里叶变换功率谱图。工况 2 用溢流阀产生回油路背压, 增加了系统的阻尼, 抑制了振动幅值。由压力波动主宰的振动主频 10~15 Hz 处的能量逐步下降, 20 Hz 附近由溢流阀主宰的振动后两段能量大。因为前半程呈软弹簧特性, 经历了  $\omega/\omega_n$  由小到大的扫频过程, 与工况 1 相似, 故发生图 6 左偏曲线所示的“跳跃现象”, 但软弹簧特性比工况 1 弱, 故区域变窄, 带宽变窄; 后半程呈硬弹簧特性, 频响如图 6 右偏曲线所示, 由于  $\omega/\omega_n$  由大变小, 故功率谱幅值由大变小。

图 16 显示了工况 3 分段采样时域波形, 与前两种工况都不同。图 17 显示了工况 3 的快速傅里叶变换功率谱图。工况 3 回油路上节流元件增加了系统阻尼, 抑制了振动幅值, 其主要能量自始至终集中在由压力波动主宰的振动主频 15~20 Hz 处。该工况全程呈硬弹簧特性, 频响如图 6 右偏曲线所示。弹簧刚度值由小到大, 相当于经历了  $\omega/\omega_n$  由大变小的扫频过程。始段虽然  $\omega/\omega_n$  大, 但硬弹簧特征弱, 频响峰值弯曲程度小, 不稳定区域窄, 可以避开, 工作在峰值右边; 中段附近产生共振, 幅值最大; 终段  $\omega/\omega_n$  小, 工作在图 6 左半部稳定区, 故整个过程功率谱峰值中间高两边低。

### 3 结论

(1) 液压缸往复运动过程中, 液压缸弹簧刚度随活塞位移而变化, 根据工况不同呈现出软弹簧特性或硬弹簧特性; 液压缸运动摩擦力变化规律, 服从 Streibek 曲线, 低速运动区段呈现出非线性规律, 速度接近零时摩擦因数取值具有随机性和跳跃性。

(2) 弹簧力的非线性作用可以用有阻尼的 Duffing 方程来描述, 其软弹簧特性和硬弹簧特性决定了有阻尼的 Duffing 方程频响峰值尾部的弯曲方向, 阻尼的大小决定了峰值的大小。

(3) 系统摩擦力的非线性作用随工作点在 Streibek 曲线上所处区段不同而异, 在动压润滑区, 摩擦力线性变化, 其效果增加了系统的阻尼; 在混合润滑区和边界润滑区, 减小了系统的阻尼, 有可能使系统变成负阻尼系统, 产生自激振动, 自激振动存在极限环, 其响应特性可以用 Van Der Pol 方程来描述; 在零速区, 摩擦因数取值具有随机性和跳跃性, 系统可以归结为具有随机系数的 Van Der Pol 方程。

(4) 同时考虑弹簧力和摩擦力非线性作用的耦合系统具有 Lienard 方程的形式, 并依此建立了液压缸运动的非线性动力学模型。

(5) 液压缸在进油路节流调速、回油路无背压工况下, 低速运行不可避免地要产生爬行现象, 其原因在于它遭遇了弱弹簧特性引起的低频段“跳跃现象”、负阻尼引起的摩擦自激振动和小阻尼引起大振幅的多重作用。相比之下, 回油路节流调速工况, 全程呈硬弹簧特性, 避免了低频段的“跳跃现象”, 节流元件增大了阻尼、减小了振幅、抑制了自激振动, 所以该工况多重优势并举, 在三种工况中最优。

### 参 考 文 献

- [1] 李永堂, 高步芳, 高雨苗. 液压系统建模与仿真[M]. 北京: 冶金工业出版社, 2003.
- [2] 邓乐. 液压仿形刀架动态特性分析[J]. 组合机床与自动化加工技术, 2003, 6: 24-25.
- [3] 罗艳蕾. 利用 Matlab 实现液压节流调速系统动态特性仿真[J]. 机械与电子, 2002, 4: 73-75.
- [4] 石红雁, 许纯新, 付连宇. 基于 SIMULINK 的液压系统动态仿真[J]. 农业机械学报, 2000, 31(5): 94-96.
- [5] 卢贵主, 胡国清. 利用功率键合图和 SIMULINK 实现液压系统动态仿真[J]. 机床与液压, 2001, 4: 79-80.
- [6] 王艾伦, 钟掘. 一个复杂非线性液压系统的建模和仿真[J]. 机械科学与技术, 1999, 18(4): 521-524.
- [7] 贺仁良, 李尧中. 磨床低速爬行现象的鱼刺图及其分析[J]. 液压与气动, 1997, 3: 27-28.
- [8] 黄民双, 曾励, 陶宝祺, 等. 机床液压系统的爬行振动分析及试验研究[J]. 现代机械, 1998, 4: 40-44.
- [9] 任卫红. 摩擦自激振动引起的液压爬行现象分析[J]. 煤矿机械, 2003, 10: 44-45.
- [10] 高钦和. 进油路节流调速液压回路爬行现象的建模与仿真分析[J]. 机床与液压, 2000, 5: 83-85.
- [11] 温诗铸, 黄平. 摩擦学原理[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
- [12] 师汉民, 谌刚, 吴雅. 机械振动系统[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1992.
- [13] 杨安元, 杨雪. 液压系统的减振方法研究[J]. 液压与气动, 2004, 2: 51-53.
- [14] 刘秉正, 彭建华. 非线性动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [15] 刘延柱, 陈立群. 非线性振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [16] CAO Jusheng. Existence for periodic solution of forced Lienard equation[J]. Journal of Nanjing Normal University (Natural Science), 1997, 20(4): 14-19.

- [17] 周进. Lienard 方程周期解不存在的充分条件[J]. 应用数学, 1998, 11: 41-43.
- [18] 逯鸿友. 一类 LIENARD 方程极限环的不存在性[J]. 哈尔滨师范大学自然科学学报, 1997, 13(6): 18-20.
- [19] 王继昌, 孙承义. LIENARD 方程极限环的唯一性[J]. 鞍山师范学院学报(综合版), 1997, 18(4): 8-10.
- [20] 飞思科技产品研发中心. MATLAB7 辅助信号处理技术与应用[M]. 北京: 电子工业出版社, 2005.
- [21] 卢文祥, 杜润生. 机械工程测试信息信号分析[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 1999.

## NONLINEAR DYNAMIC CHARACTERISTICS OF MOVING HYDRAULIC CYLINDER

WANG Linhong<sup>1,2</sup> WU Bo<sup>1</sup> DU Runsheng<sup>1</sup>  
YANG Shuzi<sup>1</sup>

(1. School of Mechanical Science and  
Engineering, Huazhong University of  
Science and Technology, Wuhan 430074;

2. Department of Electromechanical Engineering,  
Nanyang Institute of Technology, Nanyang 473004)

**Abstract:** In terms of nonlinear dynamics, the actions of nonlinear spring force and nonlinear frictional force on dynamic characteristics of moving hydraulic cylinder are emphatically studied by means of theoretical analysis and

experimental verification. Varying regularities of spring stiffness with piston displacement controlled by three types of hydraulic throttle-governing circuits are obtained. Soft spring property or hard spring property shown separately by above different working situations are found. The conclusions that the effect of nonlinear spring can be described by Duffing equation, the effect of nonlinear frictional force can be described by Van Der Pol equation, and their coupling effect can be described by Lienard equation are achieved. The reasons why hydraulic cylinder creeps in lower velocity are common acting results of the jump phenomenon caused by soft spring property and the self-excited vibration caused by nonlinear frictional force in specific working situation are expressed. Solutions of the equations are of different patterns in terms of different working conditions. All above illustrate that the nonlinear characteristics of moving hydraulic cylinder are complicated and changeable.

**Key words:** Hydraulic cylinder

Nonlinear dynamic characteristics  
Duffing equation Van Der Pol equation  
Lienard equation Jump phenomenon  
Self-excited vibration

**作者简介:** 王林鸿, 男, 1963 年出生, 博士研究生, 教授。主要从事流体传动和机械动力学研究。完成省级科研项目 6 项, 发表论文 20 余篇。

E-mail: wlhdx@tom.com

吴波, 男, 1963 年出生, 教授, 博士研究生导师。

杜润生, 男, 1949 年出生, 教授, 博士研究生导师。

杨叔子, 男, 1933 年出生, 教授, 博士研究生导师, 中国科学院院士。